

Θέματα πανελλαδικών εξετάσεων που επιλύονται με τη συνέχεια συνάρτησης

1. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3\alpha e^{x+1}, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \alpha x + 3\beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \mu x + \alpha \sigma \nu x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$ να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

1986

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$. Να προσδιοριστεί το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

1989

3. Δίνεται η συνάρτηση f , συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - e^{2x} + 1}{\eta \mu 2x} = 5.$$

- Γ1. Να βρείτε το $f(0)$.

2000

4. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και $f(\alpha) = 2\beta$, $f(\beta) = 2\alpha$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

2001

5. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$.

- Β1. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $\alpha = -\frac{1}{9}$.

2001

6. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) .

Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma)f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- Δ1. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .

2003

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

- Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

- Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

2006

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \sigma \nu x, & 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}, \lambda > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

2020

9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x$ και συνάρτηση

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = -x^2 + \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + \alpha x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x-1)-x}{x-k} + \frac{f(x)-g(x)}{x-k-1} = 0$, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(k, k+1)$.

Επαναληπτικές 2021

10. Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$.

i. Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2022

11. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x}{x-1}$ και $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \ln x$.

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Επαναληπτικές 2022

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^x & , 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda & , x \geq 2 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

2024